

TUM

Anfängerpraktikum für Physiker II

Wintersemester 2006/2007

Brückenschaltung (BRÜ)

9. Januar 2007

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. Messung ohmscher und komplexer Widerstände	2
3. Versuchsauswertung	3
3.1. Wheatstone'sche Brücke	3
3.1.1. Schiebewiderstand	3
3.1.2. Glühbirne, 3 Volt	4
3.1.3. Glühbirne, 10 Ω und 200 Ω	4
3.1.4. Spulen	6
3.2. Wechselspannungsbrücke	6
3.2.1. Abgleichbedingungen für Real- und Imaginärteil	6
3.2.2. Induktivität kleine Spule	8
3.2.3. Induktivität große Spule, halbe Windungszahl	8
3.2.4. Kapazität eines Kondensators	9

1. Einleitung

Der Versuch Brückenschaltung veranschaulicht die Kirchhoffschen Gesetze anhand der Wheatstone'schen Brücke und gibt eine Einführung in komplexe Widerstände bzw. Zeigerdiagramme.

2. Messung ohmscher und komplexer Widerstände

Der ohmsche Widerstand R eines Leiters bzw. Bauteils ließe sich direkt bestimmen, wenn man gleichzeitig Strom und Spannung, die am Bauteil anliegen, messen könnte. Der Widerstand R stellt das Verhältnis von Spannung zu Strom dar: $R = U/I$. Nun beeinflussen sich die Meßgeräte für Strom und Spannung aber gegenseitig bzw. verfälschen das Meßergebnis, da das Spannungsmeßgerät möglichst wenig Strom aufnehmen und das Strommeßgerät möglichst keinen Spannungsabfall verursachen soll, wie im Versuch „Transistorkennlinien 1“ bereits erklärt. Je nach Schaltung wäre entweder nur die Strom- oder die Spannungsmessung korrekt. Daher wird ein unbekannter ohmscher Widerstand mit bekannten Widerständen verglichen. In einer Wheatstone'schen Meßbrücke werden drei bekannte Widerstände so variiert, daß der diagonal fließende Strom gleich Null ist. Mit Hilfe der beiden Kirchhoffschen Gesetze läßt sich dann der Wert des vierten, unbekanntes Widerstandes berechnen. Leicht abgewandelt läßt sich diese Brücke auch zur Messung komplexer Widerstände verwenden.

3. Versuchsauswertung

Zuerst wurden mit der Wheatstone'schen Brücke die ohmschen Widerstände verschiedener Bauteile gemessen, anschließend mit der Wechselspannungsbrücke die Induktivitäten zweier Spulen und die Kapazität eines Kondensators.

Anmerkung: Bei den im Protokollheft skizzierten Schaltungen sind die Indizes 1 und 2 sowie 3 und 4 vertauscht, daher stimmen auch die Formeln dieser Ausarbeitung in dem Punkt nicht mit der Versuchsanleitung überein.

3.1. Wheatstone'sche Brücke

Zur Messung ohmscher Widerstände wurde für R_1 ein bekannter fester Widerstand verwendet, R_2 war der unbekannte Widerstand. Um den Diagonalstrom abgleichen zu können, wurde für R_3 und R_4 ein Helipot benutzt. Für den Abgleich war ein Ampèremeter ausreichend.

3.1.1. Schiebewiderstand

Als Schiebewiderstand voller Länge diente ein zweites Helipot. Die Messung wurde dreimal mit jeweils verschiedenem festem Widerstand durchgeführt: $R_1 = 10 \Omega$, 30Ω und 100Ω . Die Spannung betrug $U = 0,5 \text{ V}$. Die verwendeten Widerstände haben laut Hersteller eine Toleranz von $\pm 1\%$, das Helipot war mit $100 \Omega \pm 1\%$ und einer linearen Toleranz von $\pm 0,1\%$ angegeben. Die Meßgenauigkeit wird auf ± 3 Skalenteile geschätzt, da der Rechtsanschlag auf der Skala nicht bei Null lag. Anhand dieser Werte erhält man folgende Tabelle:

Vergleichswiderstand	Skalenteile	Widerstand Helipot
$(10 \pm 0,1) \Omega$	84 ± 3	$(109,05 \pm 5,34) \Omega$
$(30 \pm 0,3) \Omega$	224 ± 3	$(103,93 \pm 2,83) \Omega$
$(100 \pm 1) \Omega$	492 ± 3	$(103,25 \pm 2,27) \Omega$

Tabelle 1: Messung Schiebewiderstand

Da der Schiebewiderstand mit drei verschiedenen Vergleichswiderständen gemessen wurde, wurde für die Studentfunktion ein Wert von $t = 1,32$ (laut Fehlerrechnungsskript) verwendet. Damit beträgt der Widerstand des Helipot $R = (105,41 \pm 2,42) \Omega$, womit er nicht im Bereich der Herstellerangabe liegt. Eventuell ist bei der ersten Messung ein Fehler unterlaufen, was auch den Ausreißer von 109Ω erklären würde.

3.1.2. Glühbirne, 3 Volt

Die Glühbirne wurde zuerst bei einer Spannung von $U = 3 \text{ V}$ mit drei verschiedenen Vergleichswiderständen von $R_1 = 10 \text{ } \Omega$, $100 \text{ } \Omega$ und $200 \text{ } \Omega$ gemessen. Man erhält hier eine Tabelle wie in 3.1.1. auch. Es macht allerdings keinen Sinn, einen definitiven ohmschen Widerstand der Glühbirne anzugeben, da sich die Glühwendel im Betrieb erhitzt und der Widerstand somit vom Vergleichswiderstand abhängt, zumindest wenn die Birne das Leuchten anfängt. Das tat sie zwar nur bei der Messung mit $10 \text{ } \Omega$, aber auch bei den anderen beiden Messungen liegen die errechneten Widerstände um etwa $20 \text{ } \Omega$ auseinander. Die Frage „Liegen diese Meßwerte innerhalb der Meßunsicherheit?“ ist etwas irreführend, da zum einen keine Referenzwerte für die Glühbirne angegeben sind und zum anderen die einzelnen Meßwerte nicht gegenseitig in ihren Unsicherheiten liegen können.

Vergleichswiderstand	Skalenteile	Widerstand Helipot
$(10 \pm 0,1) \text{ } \Omega$	104 ± 3	$(86,15 \pm 3,64) \text{ } \Omega$
$(100 \pm 1) \text{ } \Omega$	647 ± 3	$(54,56 \pm 1,26) \text{ } \Omega$
$(200 \pm 2) \text{ } \Omega$	851 ± 3	$(35,02 \pm 1,18) \text{ } \Omega$

Tabelle 2: Messung Glühbirne bei 3 Volt

3.1.3. Glühbirne, 10 Ω und 200 Ω

Anschließend wurde die Glühbirne bei verschiedenen Spannungen gemessen, um eine Kennlinie zu erhalten. Das geschah zuerst mit einem Vergleichswiderstand von $R_1 = 10 \text{ } \Omega$ und dann mit $R_1 = 200 \text{ } \Omega$. Die Spannungen betragen jeweils $U = 0,5 \text{ V}$, 1 V , 2 V , 3 V , 4 V , und 5 V . Für den Fehler wurde eine Ablesegenauigkeit von $\pm 0,25 \text{ V}$ angesetzt.

Durch den kleinen Vergleichswiderstand von $10 \text{ } \Omega$ war der Strom, der durch die Glühbirne floß, so groß, daß diese anfang zu Leuchten. Die Kurve stellt also den proportional zur Erwärmung der Glühwendel steigenden Widerstand dar.

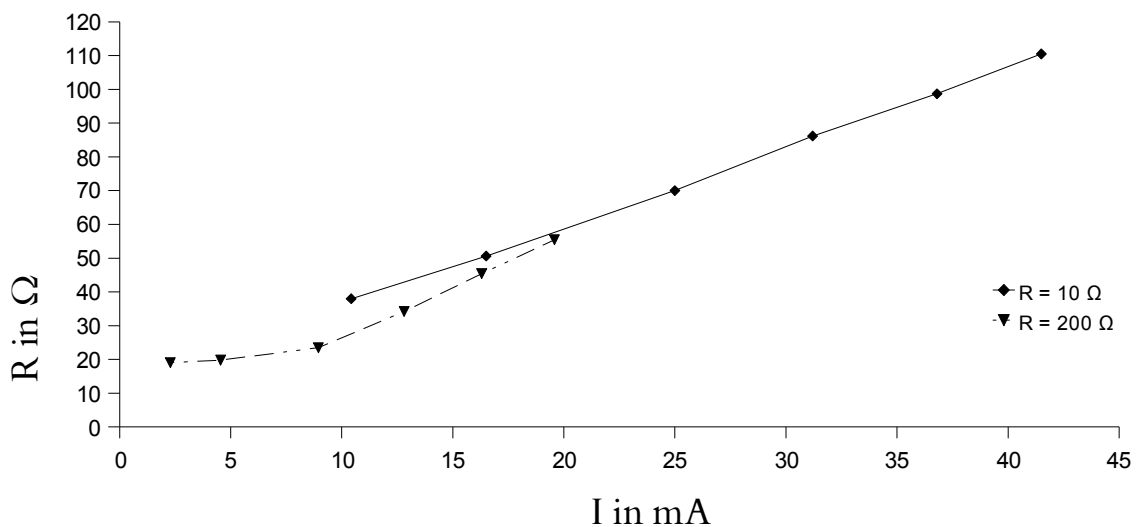
U in V	$0,5 \pm 0,25$	$1 \pm 0,25$	$2 \pm 0,25$	$3 \pm 0,25$	$4 \pm 0,25$	$5 \pm 0,25$
Skalenteile	$208,5 \pm 3$	165 ± 3	125 ± 3	104 ± 3	92 ± 3	83 ± 3
R in Ω	$37,96 \pm 1,07$	$50,61 \pm 1,61$	$70 \pm 2,62$	$86,15 \pm 3,64$	$98,70 \pm 4,53$	$110,48 \pm 5,46$
I in mA	$10,43 \pm 5,47$	$16,50 \pm 4,59$	$25,00 \pm 3,98$	$31,20 \pm 3,81$	$36,80 \pm 3,87$	$41,50 \pm 3,99$

Tabelle 3: Ströme durch die Glühbirne bei verschiedenen Spannungen, 10 Ω

U in V	$0,5 \pm 0,25$	$1 \pm 0,25$	$2 \pm 0,25$	$3 \pm 0,25$	$4 \pm 0,25$	$5 \pm 0,25$
Skalenteile	913 ± 3	910 ± 3	895 ± 3	854 ± 3	815 ± 3	783 ± 3
R in Ω	$19,06 \pm 0,91$	$19,78 \pm 0,92$	$23,46 \pm 0,98$	$34,19 \pm 1,16$	$45,40 \pm 1,36$	$55,43 \pm 1,53$
I in mA	$2,28 \pm 1,17$	$4,55 \pm 1,2$	$8,95 \pm 1,24$	$12,81 \pm 1,24$	$16,3 \pm 1,24$	$19,58 \pm 1,25$

Tabelle 3: Ströme durch die Glühbirne bei verschiedenen Spannungen, 200 Ω

R über I

Abbildung 1: Abhängigkeit des Widerstandes vom Strom, 10 Ω

Mit dem größeren Vergleichswiderstand von 200 Ω war der Strom in der Glühbirne geringer, somit war auch ihr Widerstand kleiner. Der nichtlineare Verlauf der Kurve deutet darauf hin, daß bei geringeren Spannungen nicht genug Strom floß, um die Wendel wesentlich zu erhitzen und der Widerstand einigermaßen konstant blieb. Zu höheren Spannungen hin nahm die Erwärmung der Glühwendel zu, sodaß der Kurvenverlauf in einen Bereich schwenkt, in dem der Widerstand der Glühwendel vom Strom abhängt. Im oberen Teil des Diagramms kann man den gleichen proportionalen Verlauf wie aus der ersten Messung erkennen.

3.1.4. Spulen

Die letzten Bauteile, die mit der Wheatstone'schen Brücke gemessen wurden, waren zwei Spulen, die sich bei Gleichstrom wie ohmsche Widerstände verhalten. Die große Luftspule aus eher dickem Kupferdraht hat einen Widerstand von $R_{DC,1} = 0,71 \pm 0,04 \Omega$, die kleinere Spule in dem Metallgehäuse hat einen Widerstand von $R_{DC,2} = 39,75 \pm 1,14 \Omega$. Offenbar ist sie aus wesentlich dünnerem Draht gewickelt.

3.2. Wechselspannungsbrücke

3.2.1. Abgleichbedingungen für Real- und Imaginärteil

Zum Abgleich der Wechselspannungsbrücke muß der Strom über Z_1 und Z_2 nach Betrag und Phase mit dem Strom über R_3 und R_4 übereinstimmen, also

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_3}{R_4} .$$

Kondensator

Für die beiden Kondensatoren gilt

$$Z_1 = R_1 - \frac{i}{\omega \cdot C_1} \quad \text{und} \quad Z_2 = \left(\frac{1}{R_2} + i \cdot \omega \cdot C_2 \right)^{-1} .$$

In die Gleichung für die Abgleichbedingung eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} \left(R_1 - \frac{i}{\omega \cdot C_1} \right) \cdot \left(\frac{1}{R_2} + i \cdot \omega \cdot C_2 \right) &= \frac{R_3}{R_4} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \right) + i \left(\omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} \right) &= \frac{R_3}{R_4} . \end{aligned}$$

Für den Realteil gilt demnach

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \right) &= \frac{R_3}{R_4} \\ \Leftrightarrow \frac{R_3}{R_4} &= \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} . \end{aligned}$$

Da R_3 und R_4 ohmsche und somit rein reelle Widerstände sind, ist der Imaginärteil gleich Null. Also:

$$\omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega R_1 C_2 = \frac{1}{\omega R_2 C_1}$$

$$\Leftrightarrow R_1 \cdot R_2 = \frac{1}{\omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2}$$

Spule

Analog für Spulen:

$$Z_1 = R_1 + i \cdot \omega \cdot L_1 \quad \text{und} \quad Z_2 = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{i}{\omega \cdot L_2} \right)^{-1},$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{L_1}{L_2} \quad \text{für den Realteil und}$$

$$\Leftrightarrow R_1 \cdot R_2 = \omega^2 \cdot L_1 \cdot L_2 \quad \text{für den Imaginärteil.}$$

3.2.2. Induktivität kleine Spule

Um die Induktivität der kleinen Spule zu messen, wurde sie ohne parallelgeschalteten Widerstand an der Stelle Z_2 eingebaut, die Spule bekannter Induktivität saß in Reihe mit einem Helipot an der Stelle Z_1 . Daher gilt für die Abgleichbedingung

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_v + R_s + i \cdot \omega \cdot L_1}{R_2 + i \cdot \omega \cdot L_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{X}{1000 - X}$$

$$\Leftrightarrow (R_v + R_s) \cdot R_4 + i \cdot \omega \cdot L_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3 + i \cdot \omega \cdot L_2 \cdot R_3, \quad ,$$

wobei X für die abgelesenen Skalenteile steht. Links und rechts müssen Real- und Imaginärteil jeweils gleichgroß sein. Dadurch läßt sich die gesuchte Induktivität leicht berechnen:

$$L_1 \cdot R_4 = L_2 \cdot R_3 \quad (1)$$

$$L_2 = L_1 \cdot \frac{1000 - X}{X}$$

Die Induktivität der großen Spule war mit $(2,3 \pm 0,1)$ mH angegeben, der Fehler für X wird wieder mit ± 3 angesetzt. Für die kleine Spule ergibt sich somit eine Induktivität von $L_2 = (3,53 \pm 0,24)$ mH.

3.2.3. Induktivität große Spule, halbe Windungszahl

Zur Messung der Induktivität der großen Spule mit halber Windungszahl wurde der Schaltungsaufbau beibehalten, die unbekannte Induktivität ist also nun L_1 . Nach Formel (1) ergibt sie sich zu $L_1 = (0,5 \pm 0,04)$ mH.

Theoretisch sollte sich nach

$$L = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l}$$

die Induktivität bei halber Windungszahl vierteilen, was hier auch rechnerisch fast erreicht wird. Da allerdings die Spule nur noch halb so lang ist, dürfte sich eigentlich auch die Induktivität nur halbieren.

3.2.4. Kapazität eines Kondensators

Der Fehler des Helipot wird wieder mit ± 3 angesetzt, der bekannte Kondensator hatte eine Kapazität von $1 \mu\text{F}$ und eine geschätzte Toleranz von $\pm 5\%$. Die Studentfunktion beträgt bei nur zwei Messungen $t = 1,84$. Da hier außer dem Helipot für R_3 und R_4 keine ohmschen Widerstände benutzt wurden, läßt sich die Kapazität des unbekanntes Kondensators ganz einfach über

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{i \cdot \omega \cdot C_2}{i \cdot \omega \cdot C_1}$$

$$\Leftrightarrow C_2 = C_1 \cdot \frac{R_3}{R_4}$$

zu $C_1 = (2,17 \pm 0,13)$ μF berechnen. Zum bekannten Kondensator war zwar ein Helipot in Reihe geschaltet, der abgelesene Wert betrug aber mit nur neun Skalenteilen weniger als $0,01 \Omega$, selbst bei Minimalanschlag – also bei null Skalenteilen – änderte sich das Bild am Oszilloskop nicht.